Departamento Inteligencia Artificial

LÓGICA - 1º Grado en Ingeniería Informática

Facultad de Informática
Universidad Politécnica de Madrid

Lógica Computacional: Estrategias de Resolución

Petr Sosík
psosik@fi.upm.es

Despacho 2201

Estrategias de resolución

- La aplicación del procedimiento de saturación, sin limitaciones, genera normalmente muchas cláusulas irrelevantes y redundantes

- Es necesario aplicar criterios selectivos de forma sistemática que simplifiquen el proceso y lo hagan computacionalmente eficiente

- Se usarán dos tipos de criterios:
  - **Estrategias de simplificación**: con el objetivo de reducir el número de cláusulas en el conjunto
  - **Estrategias de refinamiento**: con el objetivo de limitar la generación de cláusulas

Estrategias de simplificación

1) Eliminación de cláusulas idénticas

- Es posible deducir por resolución □ a partir de un conjunto de cláusulas C sii es posible deducir por resolución □ a partir de C tras eliminar cláusulas idénticas (obvio)
- Conclusión: si se genera una cláusula que ya está en la demostración, no se incluye nuevamente

2) Eliminación de cláusulas con literales puros

- Un literal L de un conjunto de cláusulas es puro si y sólo si no existe ningún otro literal complementario ¬L' en el conjunto tal que L y L' son unificables
- Una cláusula con un literal puro es inútil de cara a la refutación porque el literal nunca podrá eliminarse en el proceso de resolución
- Conclusión: esta estrategia sólo es necesario aplicarla una vez, puesto que de un conjunto de cláusulas sin literales puros no pueden generarse nuevas cláusulas con literales puros

Departamento Inteligencia Artificial

Estrategias de simplificación

C:

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
9)	$Q \vee \neg Q$	de 2) y 3)
10)	$P \vee \neg P$	de 2) y 3)
11)	$\neg P$	de 2) y 4)
12)	$\neg Q$	de 3) y 4)
13)	$P \vee Q$	de 1) y 7)
14)	$P \vee Q$	de 1) y 8)
15)	$P \vee Q$	de 1) y 9)
16)	$P \vee Q$	de 1) y 10)
17)	Q	de 1) y 11)
18)	P	de 1) y 12)
19)	Q	de 2) y 6)
20)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 7)
21)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 8)

1)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 9)
2)	$\neg P \vee Q$	de 2) y 10)
3)	$\neg P$	de 2) y 12)
4)	P	de 3) y 5)
5)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 7)
6)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 8)
7)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 9)
8)	$P \vee \neg Q$	de 3) y 10)
9)	$\neg Q$	de 3) y 11)

31)	$\neg P$	de 4) y 5)
32)	$\neg Q$	de 4) y 6)
33)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 7)
34)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 8)
35)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 9)
36)	$\neg P \vee \neg Q$	de 4) y 10)
37)	Q	de 5) y 7)
38)	Q	de 5) y 9)
39)	$\square$	de 5) y 12)

Si se aplica la estrategia de eliminación de cláusulas idénticas, la refutación anterior queda:

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
9)	$\neg P$	de 2) y 4)
10)	$\neg Q$	de 3) y 4)
11)	$\square$	de 5) y 10)

Estrategias de simplificación

3) Eliminación de cláusulas tautológicas

- Una cláusula tautológica es verdad para cualquier interpretación, por lo que si la borramos de un conjunto de cláusulas insatisfacible, el conjunto seguirá siendo insatisfacible.
- *Nota*: $p(x) \vee \neg p(x) \vee q(y)$ es una cláusula tautológica, pero $p(x) \vee \neg p(y) \vee q(y)$ no

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$Q \vee \neg Q$	de 1) y 4)
8)	$P \vee \neg P$	de 1) y 4)
9)	$\neg P$	de 2) y 4)
10)	$\neg Q$	de 3) y 4)
11)	$\square$	de 5) y 10)

Si se eliminan las tautologías, la refutación anterior queda:

1)	$P \vee Q$	
2)	$\neg P \vee Q$	
3)	$P \vee \neg Q$	
4)	$\neg P \vee \neg Q$	
5)	Q	de 1) y 2)
6)	P	de 1) y 3)
7)	$\neg P$	de 2) y 4)
8)	$\neg Q$	de 3) y 4)
9)	$\square$	de 5) y 8)

Refutaciones y estrategias de refinamiento

- ***Derivación*** de una cláusula C a partir de un conjunto de cláusulas $\{C_1,...,C_n\}$ es una secuencia $<C_1,...,C_n,R_1,...,R_m>$ tal que:
  - Cada R_i es el resolvente de dos cláusulas anteriores de la secuencia
  - No se realiza el mismo paso de resolución (entre las mismas cláusulas con los mismos factores) más de una vez
  - $R_m = C$

- ***Refutación***: derivación de $\square$ a partir de $\{C_1,...,C_n\}$

  - Para demostrar insatisfacibilidad de $\{C_1,...,C_n\}$, se consideran todas las posibles derivaciones a partir de este conjunto hasta encontrar una que sea una refutación.
  - Las estrategias de refinamiento sirven para reducir la búsqueda de refutaciones

Departamento Inteligencia Artificial

Resolución Lineal

- **Derivación lineal**: Una derivación lineal de R_m a partir de $\{C_1,...,C_n\}$ es una secuencia $C_1,...,C_n,R_{n+1},...,R_m$ tal que
  - R_{n+1} es el resolvente de dos cláusulas $\in \{C_1,...,C_n\}$ (*cláusulas de cabecera*) y
  - Para todo $i > n+1$, R_i es el resolvente de R_{i-1} con otra cláusula R_j o C_j, $j < i$

- **Resolución lineal**: Sólo genera derivaciones lineales

- **La resolución lineal es completa**: Un conjunto de cláusulas C es insatisfacible sii existe una refutación lineal de C
  - Podemos restringir las derivaciones posibles a derivaciones lineales

- Además, no es necesario probar con todas las cláusulas del conjunto inicial como punto de partida de la refutación lineal:
  - Se puede demostrar que si un conjunto de cláusulas S es satisfacible y $S \cup \{C\}$ (C es una cláusula) es insatisfacible, entonces hay un refutación lineal que empieza con C

Ejemplos de Resolución Lineal

- C_1: $\neg T(x) \vee L(x)$, C_2: $\neg D(x) \vee \neg L(x)$, C_3: $D(a)$, C_4: $I(a)$, C_5: $\neg I(x) \vee T(x)$
  - Derivación lineal: $C_1, C_2 \Rightarrow \neg T(x) \vee \neg D(x), C_3 \Rightarrow \neg T(a), C_5 \Rightarrow \neg I(a), C_4 \Rightarrow \square$
  - Derivación no lineal: $C_1, C_2 \Rightarrow \neg T(x) \vee \neg D(x)$; $C_4, C_5 \Rightarrow T(a)$; $\neg T(x) \vee \neg D(x), T(a) \Rightarrow \neg D(a), C_2 \Rightarrow \square$

- C_1: $G(c)$, C_2: $P(a)$, C_3: $\neg R(x) \vee O(x,c) \vee L(x,c)$, C_4: $A(a,c)$, C_5: $\neg P(x) \vee R(x)$, C_6: $L(x,f(x))$, C_7: $\neg A(x,y) \vee \neg G(y) \vee \neg L(x,y)$, C_8: $\neg O(x,c)$
  - Derivación lineal: $C_1, C_7 \Rightarrow \neg A(x,c) \vee \neg L(x,c), C_4 \Rightarrow \neg L(a,c), C_2 \Rightarrow \neg R(a) \vee O(a,c), C_4 \Rightarrow \neg P(a) \vee O(a,c), C_2 \Rightarrow O(a,c), C_8 \Rightarrow \square$
  - Derivación lineal: $C_6, C_7 \Rightarrow \neg A(x,f(x)) \vee \neg G(f(x))$?? (camino infructuoso)

- Dependiendo de las cláusulas de cabecera, la estrategia de resolución lineal puede lograr *o no* demostrar una determinada conclusión

Resolución input

- **Derivación input**: Una derivación input de R_m a partir de $\{C_1,...,C_n\}$ es una secuencia $C_1,...,C_n,R_{n+1},...,R_m$ tal que :
  - Para todo $i > n$, R_i es resolvente de una cláusula $C_k \in \{C_1,...,C_n\}$ y otra cláusula R_j o C_j $j < i$
- **Resolución input:** Sólo genera derivaciones input
- Ejemplos:
  - C_1: $\neg T(x) \vee L(x)$, C_2: $\neg D(x) \vee \neg L(x)$, C_3: $D(a)$, C_4: $I(a)$, C_5: $\neg I(x) \vee T(x)$
    - Refutación input (y lineal) partiendo de C_1:
      - R_1: $\neg T(x) \vee \neg D(x)$ (C_1, C_2)
      - R_2: $\neg I(x) \vee \neg D(x)$ (R_1, C_5)
      - R_3: $\neg I(a)$ (R_2, C_3)
      - R_4: $\square$ (R_3, C_4)
    - Refutación input (y lineal) partiendo de C_5:
      - R_1: $T(a)$ (C_5, C_4)
      - R_2: $L(a)$ (R_1, C_1)
      - R_3: $\neg D(a)$ (R_2, C_2)
      - R_4: $\square$ (R_3, C_3)

Resolución input

- Ejemplo: C_1: p v q, C_2: ¬p v q, C_3: r v ¬q, C_4: ¬r v ¬q
  - Refutación *no lineal y no input*:
    - R_1: q v q (C_1, C_2)
    - R_2: ¬q v ¬q (C_3, C_4)
    - R_3: □ (R_1, R_2)
  - Pero para toda derivación no lineal hay una lineal equivalente (refutación *lineal* y *no input*):
    - R_1: q v q (C_1, C_2)
    - R_2: r (R_1, C_3)
    - R_3: ¬q (R_2, C_4)
    - R_4: □ (R_3, R_1)
  - ¿Hay también una resolución input para toda resolución no input?
- **La resolución input no es completa:** Para *cualquier* conjunto de cláusulas C que sea insatisfacible no es posible afirmar que exista una refutación input de C
  - El ejemplo anterior es la prueba: no es posible deducir □ por resolución input

Resolución dirigida

- **Derivación dirigida:** Una derivación dirigida de R_m a partir de $\{C_1,...,C_n\}$, con conjunto soporte $S \subset C$, es una secuencia $C_1,...,C_n,R_{n+1},...,R_m$ tal que:
  - Para todo $i > n$, R_i es resolvente de dos cláusulas anteriores en la secuencia que no pertenecen ambas a S
- Las cláusulas de S son **cláusulas soporte** y las de C – S son **cláusulas objetivo**
- **Resolución dirigida:** Sólo genera derivaciones dirigidas
- Ejemplo: $C = \{C_1: s \vee t, C_2: \neg s \vee p, C_3: \neg q \vee r, C_4: q \vee \neg p, C_5: u \vee \neg r, C_6: \neg u, C_7: \neg t\}$, $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5\}$

1. s	$(C_1, \mathbf{C_7})$	1. t v p	(C_1, C_2)
2. p	(R_1, C_2)	2. p	$(R_1, \mathbf{C_7})$
3. q	(R_2, C_4)	3. q	(R_2, C_4)
4. r	(R_3, C_3)	4. r	(R_3, C_3)
5. u	(R_4, C_5)	5. u	(R_4, C_5)
6. □	$(R_5, \mathbf{C_6})$	6. □	$(R_5, \mathbf{C_6})$
refutación dirigida		*refutación no dirigida*	

Resolución dirigida

- **La resolución dirigida puede ser completa:** Si hay una derivación de ☐ a partir de C, y S (S ⊂ C) es satisfacible, hay una resolución dirigida de ☐ con conjunto soporte S.

- Esta estrategia no es de mucha utilidad si no es posible identificar un conjunto soporte satisfacible

- En la práctica, en la búsqueda de la refutación de una conclusión a partir de un conjunto de premisas:
  - Premisas de la demostración (en forma clausular): conjunto soporte **S**
  - Negación de la conclusión (en forma clausular): conjunto objetivo **C – S**
  - Si las premisas son inconsistentes, entonces cualquier conclusión se deriva: [A, ¬A] |— B
  - Pero si las premisas son consistentes, entonces ☐ debe derivarse de la negación de la conclusión: [A, B] |— B, es decir {A, B, ¬B} es insatisfacible

Resolución ordenada

- **Derivación ordenada:** Una derivación ordenada de C_m a partir de $\{C_1,...,C_n\}$ es una secuencia $C_1,...,C_n,R_{n+1},...,R_m$ tal que:
  - cada R_i, $i>n$, es resolvente de dos cláusulas anteriores $L_1 \vee A_{11} \vee \ldots \vee A_{1p}$ y $\neg L_2 \vee A_{21} \vee \ldots \vee A_{2q}$ donde L_1 y L_2 son unificables con un umg σ,
  - Los literales de R_i están ordenados de esta forma:
    - $(A_{11} \vee \ldots \vee A_{1p} \vee A_{21} \vee \ldots \vee A_{2q})\sigma$

- La resolución ordenada impone dos restricciones de orden:
  - Restricción de la aplicación de la regla de corte a únicamente aquellas cláusulas en las que el factor que se resuelve aparece en la primera posición

    $\neg p \vee q, \quad p \vee r \quad \Rightarrow \quad q \vee r$

    $\neg p \vee q, \quad r \vee p \quad \Rightarrow \quad$ ¿?

    $q \vee \neg p, \quad r \vee p \quad \Rightarrow \quad$ ¿?

  - Restricción del orden de los literales de la cláusula resolvente: los literales de la cláusula resolvente se disponen preservando el orden de las cláusulas participantes

    $\neg p \vee q \vee r, \quad p \vee t \vee u \quad \Rightarrow \quad q \vee r \vee t \vee u$

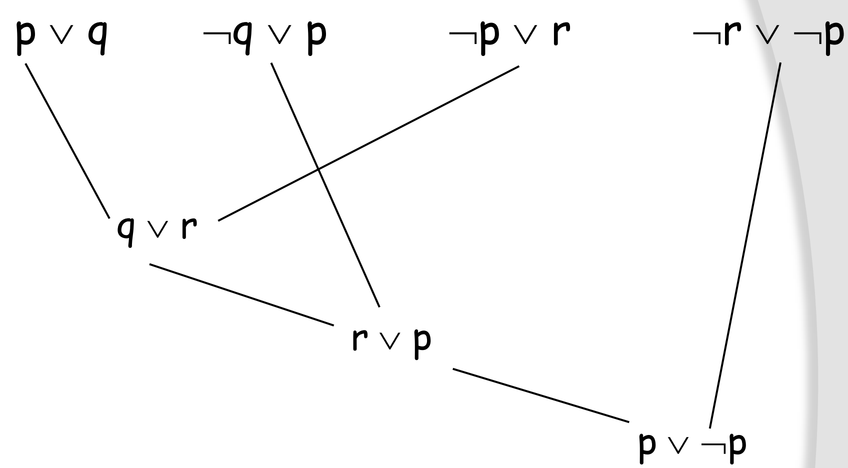
    $\neg p \vee q \vee r, \quad p \vee t \vee u \quad \Rightarrow \quad t \vee u \vee q \vee r$ ¿?

    $\neg p \vee q \vee r, \quad p \vee t \vee u \quad \Rightarrow \quad r \vee q \vee u \vee t$ ¿?

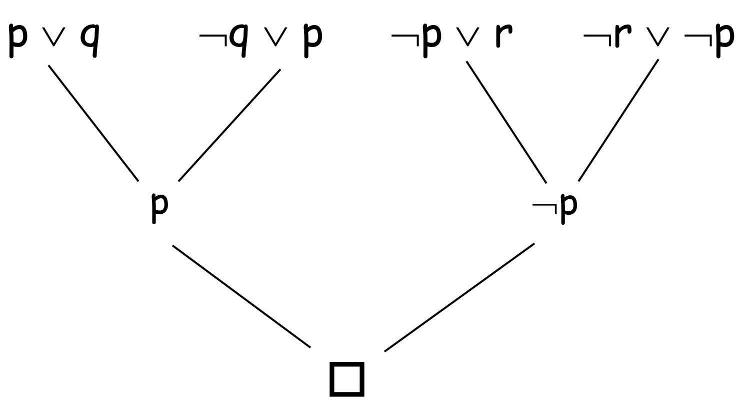
Departamento Inteligencia Artificial

Resolución ordenada

$\{p \vee q, \neg q \vee p, \neg p \vee r, \neg r \vee \neg p\}$



Resolución NO ordenada



El conjunto es insatisfacible pero no puede demostrarse con una refutación ordenada

Resolución ordenada

- Cualquier estrategia ordenada es incompleta: siempre puede construirse un ejemplo que requiera violar el orden elegido para deducir una conclusión
  - Ejemplo: { $p \vee r \vee \neg q$, q, $\neg r$ }, tratar de deducir **p** por resolución ordenada
  - Sin embargo, cuando su aplicación es factible reduce notablemente la amplitud del árbol de búsqueda. Ejemplo:

$$\{ \forall x(Ax \rightarrow Dx \wedge Ex), \neg\forall x(Ax \wedge Bx), \forall x(Dx \rightarrow (Bx \leftrightarrow Cx)) \} \vdash \exists x(Cx \wedge Ex)$$

C_1: $\neg Ax_1 \vee Dx_1$	C_1: $Dx_1 \vee \neg Ax_1$	(Literales afirmados primero)
C_2: $\neg Ax_2 \vee Ex_2$	C_2: $Ex_2 \vee \neg Ax_2$	(Y deducir ordenadamente $\square$)
C_3: Aa	C_3: Aa	
C_4: Ba	C_4: Ba	
C_5: $\neg Dx_5 \vee \neg Bx_5 \vee Cx_5$	C_5: $Cx_5 \vee \neg Dx_5 \vee \neg Bx_5$	
C_6: $\neg Dx_6 \vee \neg Cx_6 \vee Bx_6$	C_6: $Bx_6 \vee \neg Dx_6 \vee \neg Cx_6$	
C_7: $\neg Cx_7 \vee \neg Ex_7$	C_7: $\neg Cx_7 \vee \neg Ex_7$	

Departamento Inteligencia Artificial

Estrategias de refinamiento: propiedades

- **Corrección:** □ se deduce sólo si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible (□ → S insatisfacible)
- **Completitud:** Si el conjunto de cláusulas S es insatisfacible entonces □ se puede deducir (S insatisfacible → □)

	Correcta	Completa
Lineal	Si	Si
Input	Si	No
Dirigida	Si	Sí, si el conjunto soporte es satisfacible
Ordenada	Si	No

Departamento Inteligencia Artificial

Resolución SLD

- **Resolución SLD** *(Selection function in Linear resolution for Definite clauses):*
  - Estrategia que combina las estrategias lineal, input, dirigida y ordenada sobre un tipo particular de cláusulas: definidas o de Horn

- **Cláusula de Horn:** cláusula que tiene como máximo un literal afirmado
  - A v ¬B1 v ¬B2 (*el literal afirmado, cuando existe, se coloca al inicio de la cláusula*)
  - A
  - ¬B1 v ¬B2

- Aquellas cláusulas que *no tienen* literal afirmado forman parte del *conjunto objetivo*
- Aquellas cláusulas que *tienen* un literal afirmado forman parte del *conjunto soporte*

Departamento Inteligencia Artificial

Resolución SLD

- **Derivación SLD**: Dado un conjunto de cláusulas de Horn $\{C_1,...C_i,...,C_n\}$, en las que el literal afirmado, de existir, es el primero de la cláusula, y dada una cláusula objetivo C_i, hay una derivación SLD de C_m si:
  1. Existe una secuencia $<C_1,...C_i,...,C_n,C_{n+1},...,C_m>$ tal que:
  2. C_{n+1} es el resolvente de $C_i \in$ Objetivo y otra cláusula $C_j \in$ Soporte
  3. Para todo $k > n+1$, C_k es el resolvente de C_{k-1} con otra cláusula $C_l \in$ Soporte
  4. Cada paso de resolución es de la forma $L \vee C, \neg L \vee C' \Rightarrow C \vee C'$

- Resolución SLD es lineal (2 y 3), input (3), dirigida (2 y 3) y ordenada (4)

- **La resolución SLD es completa:** Un conjunto de cláusulas de Horn es insatisfacible sii existe una refutación SLD de dicho conjunto

- A partir de un conjunto de cláusulas C cualquiera, se puede obtener un conjunto de cláusular de Horn C' que es insatisfacilble sii C lo es

Departamento Inteligencia Artificial

Ejemplo de Resolución SLD

$C_1 : p(y) \vee \neg q(x, y) \vee \neg r(y)$ $\quad C_2 : p(x) \vee \neg q(x, x)$ $\quad C_3 : q(x, x) \vee \neg s(x)$

$C_4 : r(b)$ $\quad C_5 : s(a)$ $\quad C_6 : s(b)$ $\quad C_0 : \neg p(x)$